

Pendolo fisico

Gruppo di lavoro A-1-3-2

Marco RICCI (m. 641084) m.ricci66@studenti.unipi.it
Martino BARBIERI (m. 640522) m.barbieri20@studenti.unipi.it

UniPi - Laboratorio di Fisica 1 - a.a. 2021-2022
Docente: Prof. Luca Baldini

1 Introduzione

Un pendolo è un solido girevole intorno ad un asse fisso il quale non è passante per il centro di massa ed è soggetto (idealmente) alla sola azione del proprio peso e del vincolo del perno di rotazione. Dunque un qualunque oggetto fissato ad un punto di sospensione (che disti d dal centro di massa) e soggetto alla gravità può costituire un pendolo fisico.

1.1 Obiettivo

Il fine di questa esperienza è quello di misurare il periodo di un pendolo fisico in funzione della distanza del centro di massa dal punto di sospensione e della sua forma. Quindi vogliamo cercare di verificare sperimentalmente se tale dipendenza possa essere compatibile con la previsione teorica ottenuta tramite il calcolo differenziale. Quindi vogliamo comprendere in quali condizioni la coincidenza tra modello e realtà è maggiore ed infine ipotizzare le ragioni per cui vi sono delle discrepanze.

1.2 Materiale utilizzato

1. Asta metallica forata
2. Supporto di sospensione
3. Cronometro (risoluzione 0.01 s)
4. Metro a nastro (risoluzione 1 mm)
5. Calibro ventesimale (risoluzione 0.05mm)

2 Raccolta dati

In questa sezione descriveremo brevemente gli accorgimenti che abbiamo utilizzato per ridurre potenziali errori sistematici e raccogliere misure in una situazione il più possibile prossima a quella ideale.

Sul sito <https://unilab.mbarbieri.it> rendiamo disponibile tutto il materiale raccolto ed elaborato.

Come prima cosa misuriamo la lunghezza della sbarra con il metro a nastro e risulta essere di (1049 ± 1) mm. Inoltre misuriamo la posizione del centro di massa rispetto ad uno dei due estremi della sbarra che teniamo come riferimento. Il metodo adoperato per comprendere la posizione del centro di massa della sbarra è il seguente: poniamo la sbarra ad un estremo del tavolo di lavoro e facciamo avanzare da esso una certa porzione la quale è lasciata sospesa nel vuoto, quindi con spostamenti di 1 mm variamo la posizione di appoggio, sino a quando non otteniamo una situazione limite. Questa condizione limite è definita rispettando tale requisito: se perturbando la condizione di equilibrio della sbarra con piccoli colpetti determiniamo la caduta della sbarra, ma nella posizione precedente (cioè quella con il baricentro spostato di 1 mm in meno nel verso del vuoto) invece il sistema si riassetta, allora quest'ultima condizione è quella definita come limite. La misura della posizione del baricentro risulta essere di (523.5 ± 1.0) mm.

n foro	estremo 1° 0.5 mm	estremo 2° 0.5 mm	larghezza barra 0.05 mm
1	46.5	52.0	15.25
2	146.5	152.0	15.15
3	246.5	251.5	15.20
4	346.3	351.5	15.25
5	446.5	451.5	15.30
6	546.5	551.5	15.30
7	646.5	652.0	15.20
8	746.5	752.0	15.15
9	846.0	852.0	15.15

Per ogni foro eseguiamo un numero di misure del periodo superiore a 10. Ovviamente non misuriamo un solo periodo, ma al contrario un numero superiore a 5 quando possibile (in taluni casi l'attrito è tale da permettere di rilevare solamente 3 periodi, senza essere obbligati a porre la barra in una pozione tale da uscire dal regime delle piccole oscillazioni). Inoltre per ogni foro distinguiamo due casi: A e B. Questi rappresentano le due possibili facce della sbarra e rileviamo misure in entrambe le casistiche, girando ogni volta la sbarra. In corrispondenza del foro numero 5 l'attrito è tale per cui il suo effetto è evidentemente non trascurabile; infatti notiamo che è difficile persino misurare due periodi dato lo smorzamento da esso causato. I dati relativi ai tempi sono raccolti tramite due cronometri in contemporanea, ciascuno azionato da un diverso osservatore per tentare di compensare possibili errori sistematici. Ad esempio i riflessi tardivi di uno dei due soggetti, oppure per comprendere quando sia necessario ripetere le misure data la presenza di un eccessivo scarto tra i dati ottenuti, relativi ad una medesima presa di dati.

numero del foro	numero n di periodi	A/B	nT (s) 0.01 s	
1	5	A	7.93	
	5		7.81	
	3		4.22	
	3		4.67	
	3		4.75	
	3		4.64	
	3	3	B	4.66
		3		4.60
		3		4.62
		3		4.65
3		4.90		
2	5	A	7.80	
	5		7.94	
	5		4.90	
	5		7.68	
	10	10	B	15.54
		10		15.56
		5		7.68
5	7.94			
3	5	A	7.64	
	5		7.93	
	5		7.62	
	5		8.08	
	5		7.59	
	5	5	B	7.58
		5		7.81
		5		7.66
		5		7.71
		5		7.73
4	5	A	8.11	
	5		8.42	
	5		8.45	
	5		8.14	
	5		8.12	
	5	5		8.4
		5		8.41
		5		8.1
		5		8.1
5				

numero del foro	numero n di periodi	A/B	nT (s) 0.01 s	
6	5	A	6.52	
	5		6.97	
	5		6.63	
	5		6.61	
	5		6.60	
	5	5	B	6.58
		5		6.96
		5		6.85
		5		6.57
		5		6.55
7	5	A	9.02	
	5		9.29	
	5		9.01	
	10		18.33	
	5	5	B	9.14
		5		9.37
		5		9.25
		5		9.12
		5		9.20
8	5	A	7.73	
	5		8.03	
	5		7.95	
	5		7.72	
	5		7.74	
	5		7.8	
	5		8.11	
	10		15.83	
	10		15.82	
	5		5	B
		5	8.05	
		5	7.85	
		5	7.07	
		5	7.88	

numero del foro	numero n di periodi	A/B	nT (s) 0.01 s
9	5	A	7.48
	5		8.02
	5		7.76
	5		7.61
	5		7.61
	5	B	7.45
	5		8.11
	5		7.78
	5		7.58
	5		7.57
10	5	A	7.86
	5		8.08
	5		8.08
	5		7.77
	5		7.81
	5	B	7.81
	5		7.83
	5		7.83
	5		7.83
	5		7.92

Abbiamo poi registrato con un telefono cellulare (Samsung S20FE 5G) il moto del pendolo una o due volte per ciascun foro a rallentatore (240 fps) e con Tracker¹ abbiamo ottenuto la posizione angolare del pendolo in funzione del tempo.

¹Scaricabile dal sito ufficiale: <https://physlets.org/tracker/>. Abbiamo utilizzato la versione 5.1.5.

3 Analisi dati

Come prima cosa cerchiamo di capire se le misure compiute tenendo la sbarra a contatto con le due differenti facce (A - B) portano a delle variazioni nelle misure consistenti.

n foro	media A (s)	media B (s)	Δ /media (%)
1	1.54	1.56	-1.40
2	1.57	1.56	0.48
3	1.55	1.54	0.96
4	1.65	1.65	0.27
5			
6	1.33	1.34	-0.54
7	1.82	1.84	-1.03
8	1.58	1.54	2.03
9	1.54	1.54	-0.03
10	1.58	1.57	0.96

Notiamo che gli scarti percentuali tra le due misure sono dell'ordine del 1% e soprattutto cambiano persino di segno. Questo suggerisce che le misure prese con le due diverse facce possano essere trattate come un unico campione, e così da questo momento in poi faremo.

Sottraendo alla media delle posizioni dei due estremi di ogni foro la posizione del baricentro otteniamo la distanza d di ogni foro dal baricentro. Le posizioni dei fori le possiamo ottenere facendo una media delle posizioni degli estremi dei fori stessi (prima tabella nella sezione raccolta dati), e le incertezze delle loro posizioni le otteniamo sommando in quadratura le incertezze che avevamo sulle due misure e dividendo per 2. La posizione del foro rispetto ad un estremo della sbarra ha quindi incertezza di 0.35 mm ($\sqrt{\sigma_{e1}^2 + \sigma_{e2}^2}$) mentre l'incertezza sul baricentro è di 1 mm dunque sommando in quadrature otteniamo l'incertezza della distanza d di ogni foro dal baricentro della sbarra.

n foro	d (mm)	1.1 mm	media	deviazione standard (s)	$\frac{\text{deviazione-standard}}{\text{media}}$ (%)
1	474.3		1.55	0.0166	1.07
2	373.3		1.56	0.00748	0.478
3	274.3		1.54	0.0102	0.662
4	174.5		1.64	0.0100	0.608
5	74.5				
6	25.5		1.33	0.0109	0.820
7	125.8		1.83	0.00792	0.432
8	225.8		1.55	0.0144	0.922
9	325.5		1.53	0.0140	0.907
10	424.9		1.57	0.00704	0.446

Confrontando un grafico di riferimento (Fig. 2) che evidenzia la relazione teorica tra d ed i periodi notiamo che ci sono due valori che più di altri non sembrano conciliarsi con questo andamento.

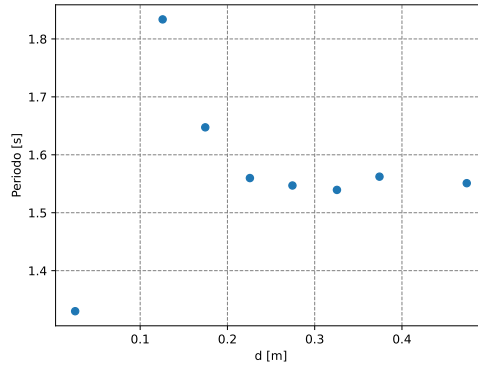


Figura 1: tutti i valori ottenuti

D'altra parte la plausibile ragione di questo discostarsi dei due punti agli estremi del grafico (Fig. 1) dall'andamento teorico è riconducibile al fatto che i fori (1 e 6) sono caratterizzati dal fatto di avere una larghezza della sbarra in loro corrispondenza maggiore rispetto alla media: 12.21 mm contro 12.25 mm del foro 1 e 12.30 mm del foro 6. Notiamo che anche il foro 5, il quale è stato in partenza scartato, ha una larghezza corrispondente di 12.30 mm. Questo dato quindi supporta ulteriormente la nostra ipotesi che la larghezza della sbarra (e dunque l'attrito) sia la causa principale di questa lontananza tra teoria ed esperienza.

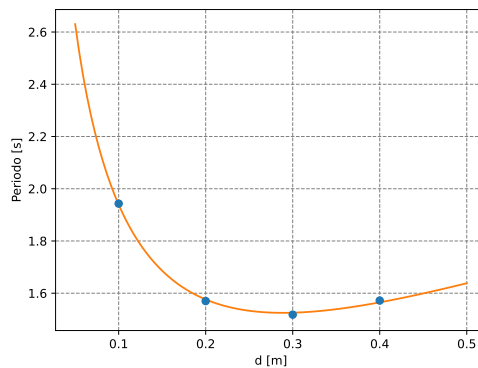


Figura 2: grafico di riferimento

Quindi da questo momento in poi scartiamo le sue misure del foro 1 e 6.

Dunque il valore della lunghezza della sbarra che meglio approssima l'andamento dei nostri dati è 1.052 mm con una incertezza di 0.009 mm (dati provenienti dal programma di fit). Notiamo, però, che i punti nel grafico (Fig: 3) sono tutti quanti al di sotto della relazione di migliore approssimazione, questo imputabile al fatto che la funzione di ottimizzazione *curvefit* lavora

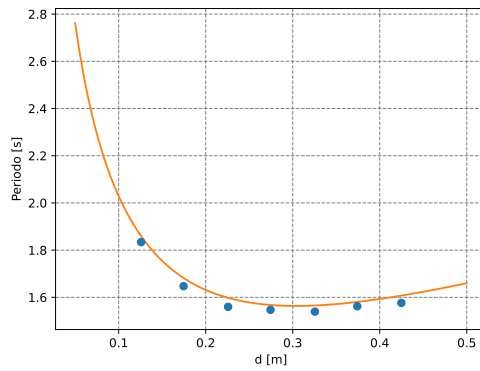


Figura 3: grafico con fori 1 e 6 scartati

con i quadrati (dipendenti solo dal valore assoluto) delle distanze dei punti sperimentali dalla funzione di miglior approssimazione. Fatto sussiste che pare esserci una qualche discrepanza di modello (se tutti i punti sono sottostanti).

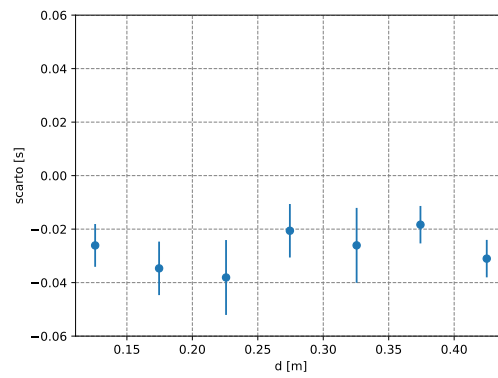


Figura 4: grafico dei resti

Per quanto riguarda i dati ottenuti campionando i video, il programma che estrapola i dati cerca un pattern in ciascun frame. Siccome i fori si muovono su una circonferenza (ci siamo assicurati che il telefono durante le riprese fosse verticale con l'accelerometro del telefono stesso), il raggio dovrebbe essere costante. Adottando l'usuale set di coordinate polari, $\hat{r} \approx \hat{\theta}$, ci aspettiamo che le incertezze delle posizioni nelle due direzioni siano uguali. Dunque un buon stimatore dell'incertezza sull'angolo è la deviazione standard del raggio sul raggio (medio) stesso.

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_r}{hr_i}$$

Questa stima non è precisa. Siccome abbiamo molti gradi di libertà, valori che poco si discostano da 1 del rapporto tra χ^2 e gradi di libertà ν danno valori estremali del p -value, che quindi non è un buon indice della bontà del fit. Ci diciamo dunque soddisfatti del fit se la radice quadrata di tale rapporto, che ci aspettiamo essere il rapporto tra la corretta stima per le incertezze statistiche e l'incertezza che noi abbiamo adottato, è prossima a 1.

I dati ottenuti da Tracker vengono elaborati da uno script in Python. Alleghiamo i grafici aventi sulle ascisse il tempo trascorso, espresso in secondi, e sulle ordinate le posizioni misurate confrontate con il modello di best-fit; aggiungiamo anche il grafico dei residui. Elenchiamo anche i parametri di best-fit ottenuti. Gli angoli sono espressi in radianti e i tempi in ottavi di secondo².

	θ_{eq}	θ_0	ω_0	γ	μ	χ/ν	$\sqrt{\chi/\nu}$
Foro 1	-1.6155	-0.1880	0.0616	0.2281	0.0007	2.3847	1.5442
Foro 2	-0.0301	-0.1809	0.0897	0.2459	0.0002	0.9471	0.9732
Foro 2b	-0.0290	-0.0500	0.0248	0.2457	0.0001	0.2136	0.4621
Foro 3	-0.0375	0.0110	0.1006	0.2512	0.0002	0.4298	0.6556
Foro 3b	-0.0356	-0.0733	0.0131	0.2513	0.0001	0.2131	0.4616
Foro 4	-0.0274	0.0019	0.1211	0.2191	0.0002	0.7448	0.8630
Foro 4b	-0.0272	-0.0325	0.0068	0.2195	0.0001	0.3383	0.5817
Foro 5	-0.0422	-0.2970	0.0661	0.1215	0.0025	13.0462	3.6119
Foro 0 (5b)	-1.6148	-0.1153	0.1405	0.1196	0.0020	21.3520	4.6208
Foro 6	-0.0265	-0.3051	0.0318	0.0464	0.0027	3.6664	1.9148
Foro 6b	-0.0292	-0.3029	-0.0003	0.0448	0.0022	3.3650	1.8344
Foro 7	-0.0437	-0.0610	0.0089	0.1779	0.0001	0.4494	0.6704
Foro 7b	-0.0504	-0.1509	0.0895	0.1777	0.0002	10.1122	3.1800
Foro 8	-0.0457	-0.1696	0.1405	0.2413	0.0003	2.1749	1.4747
Foro 9	-0.0453	-0.0230	0.1141	0.2512	0.0003	3.5295	1.8787
Foro 9b	-0.0417	-0.0379	0.0127	0.2535	0.0001	0.5192	0.7205
Foro 10	-0.0594	-0.0963	0.1195	0.2385	0.0004	8.0361	2.8348
Foro 10b	-0.0482	-0.0645	0.0103	0.2382	0.0002	0.7490	0.8654

Guardando il grafico dei residui, si nota che non sempre essi sono casualmente distribuiti attorno allo zero; talvolta appare chiara una differenza ai bordi all'inizio o alla fine del grafico. Questo può essere causato da molti fattori, come fenomeni trascurati, ad esempio l'attrito viscoso, l'oscillazione del supporto del pendolo o l'errore sistematico introdotto da Tracker, che notiamo durante i campionamenti tendere a rimanere indietro e dunque "smussare" i percorsi. Questo fatto è rilevante quando il pendolo cambia velocità; pensiamo che la forte relazione visibile in alcuni casi tra la posizione angolare e i residui possa essere causata da ciò.

Le incertezze stimate da `curve_fit` per le pulsazioni sono irrealistiche; valori circa 100 volte più elevati più attendibili. Le utilizziamo solo per pesare i valori per il fit della lunghezza in

²Questo perché Tracker si aspetta video a 30fps ma noi gliene forniamo uno a 240.

funzione delle pulsazioni. Effettuando il fit si ottiene un valore di (1051 ± 1) mm, compatibile con il valore misurato direttamente. Il grafico dei residui mostra che le pulsazioni con il perno poco distante dal baricentro sono sistematicamente più alte.

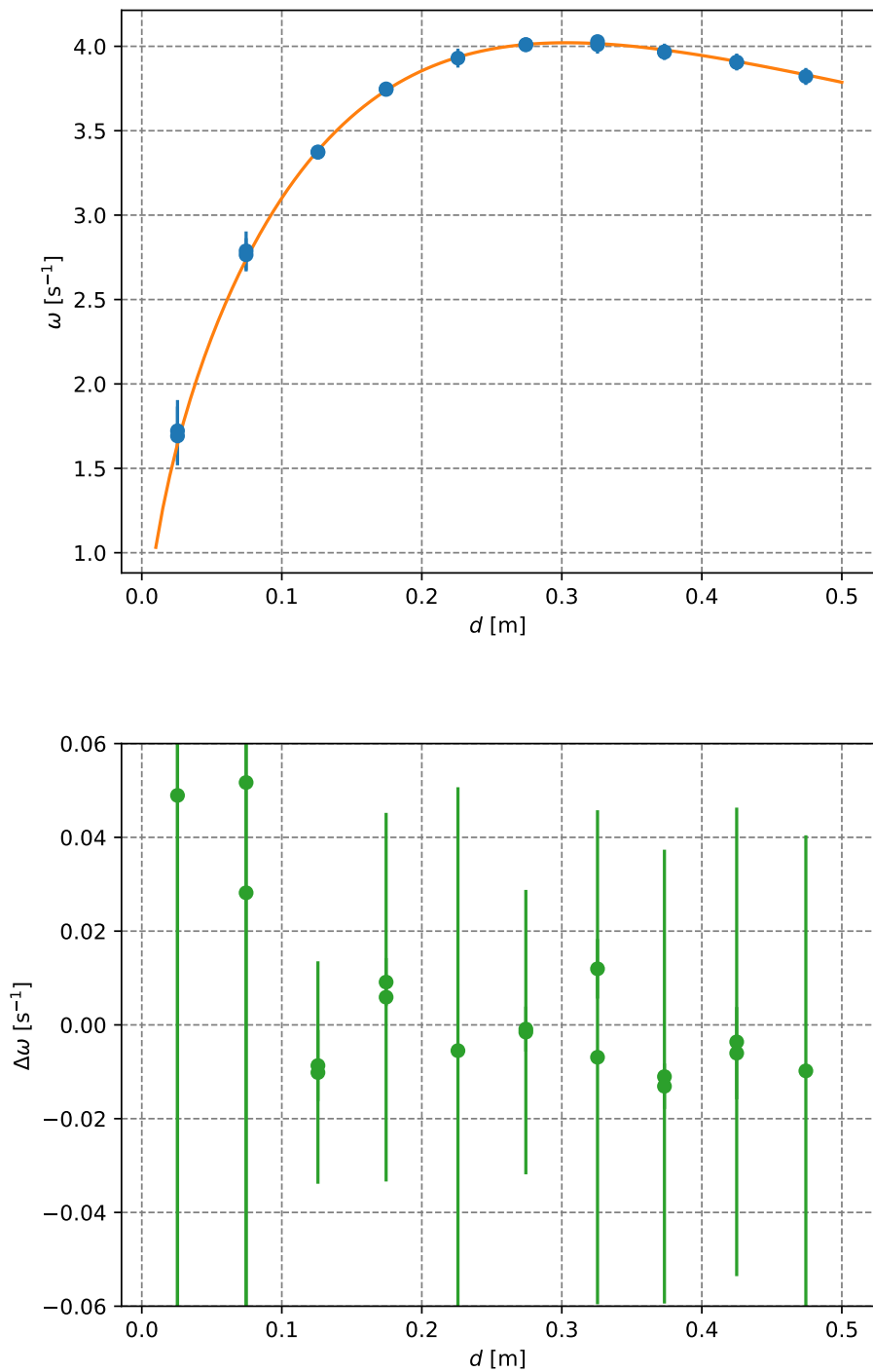


Figura 5: Grafici della pulsazione in funzione della distanza tra l'ancoraggio e il baricentro del pendolo e grafico dei residui.

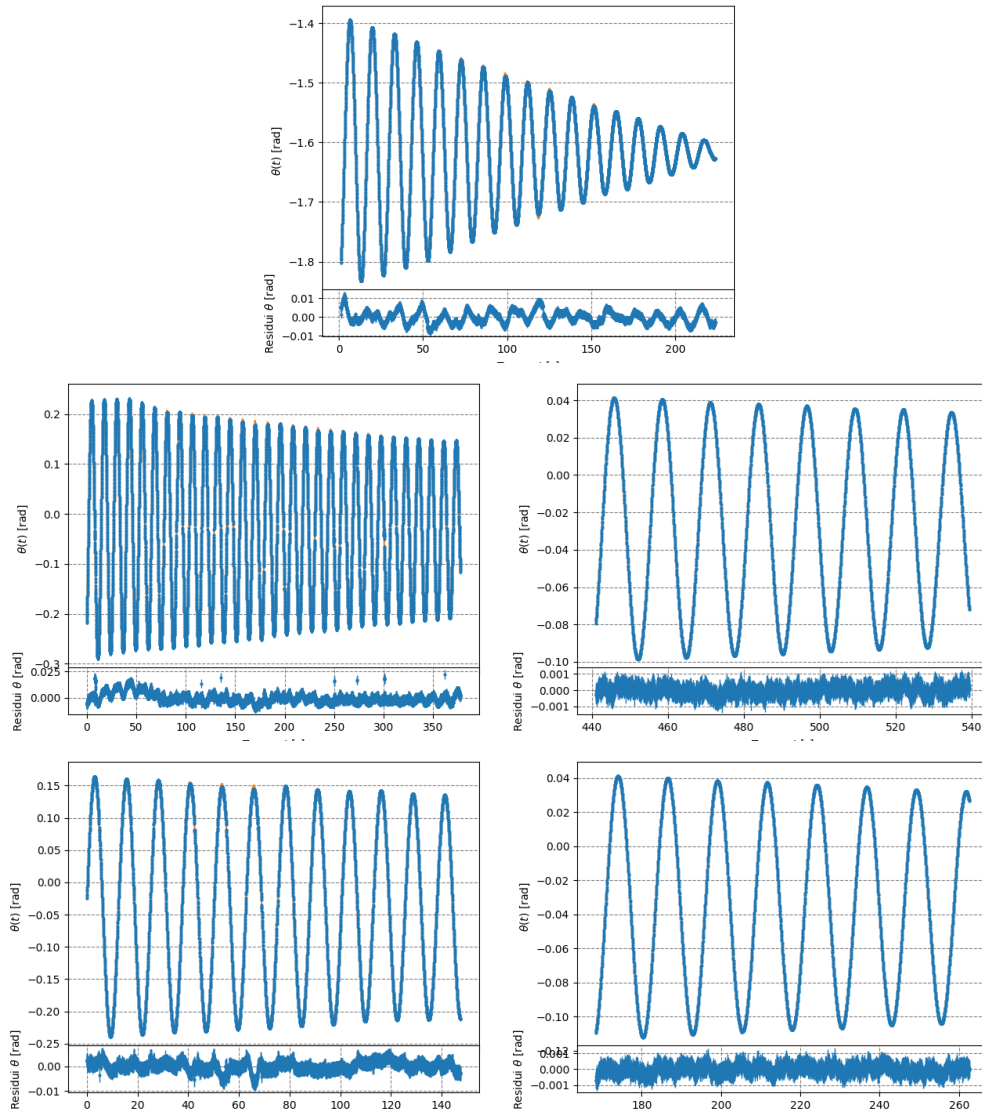


Figura 6: In ordine, i due grafici del primo foro, due grafici del secondo foro e due grafici del terzo foro.

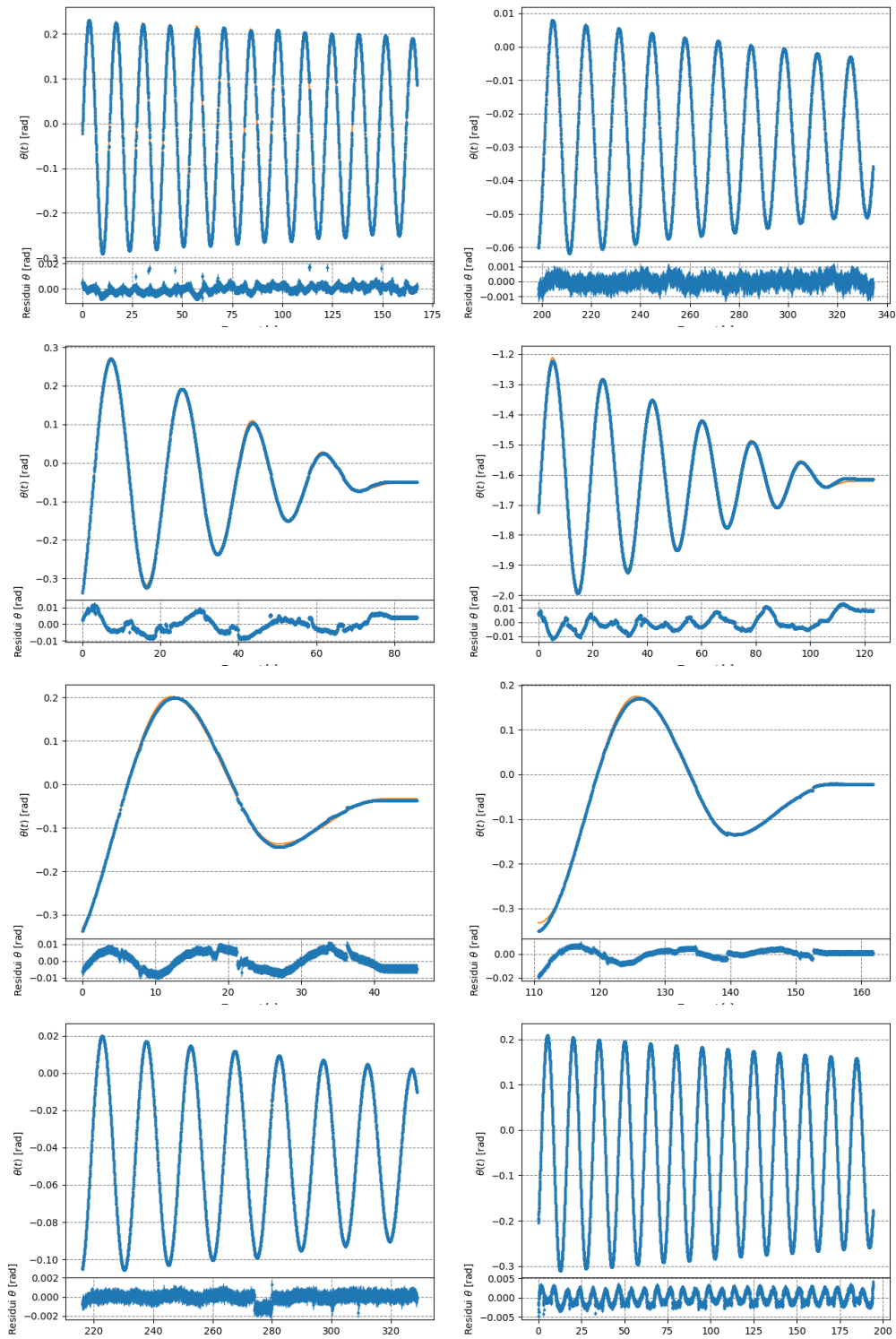


Figura 7: Due grafici del quarto foro, due del quinto foro, due del sesto e due del settimo foro.

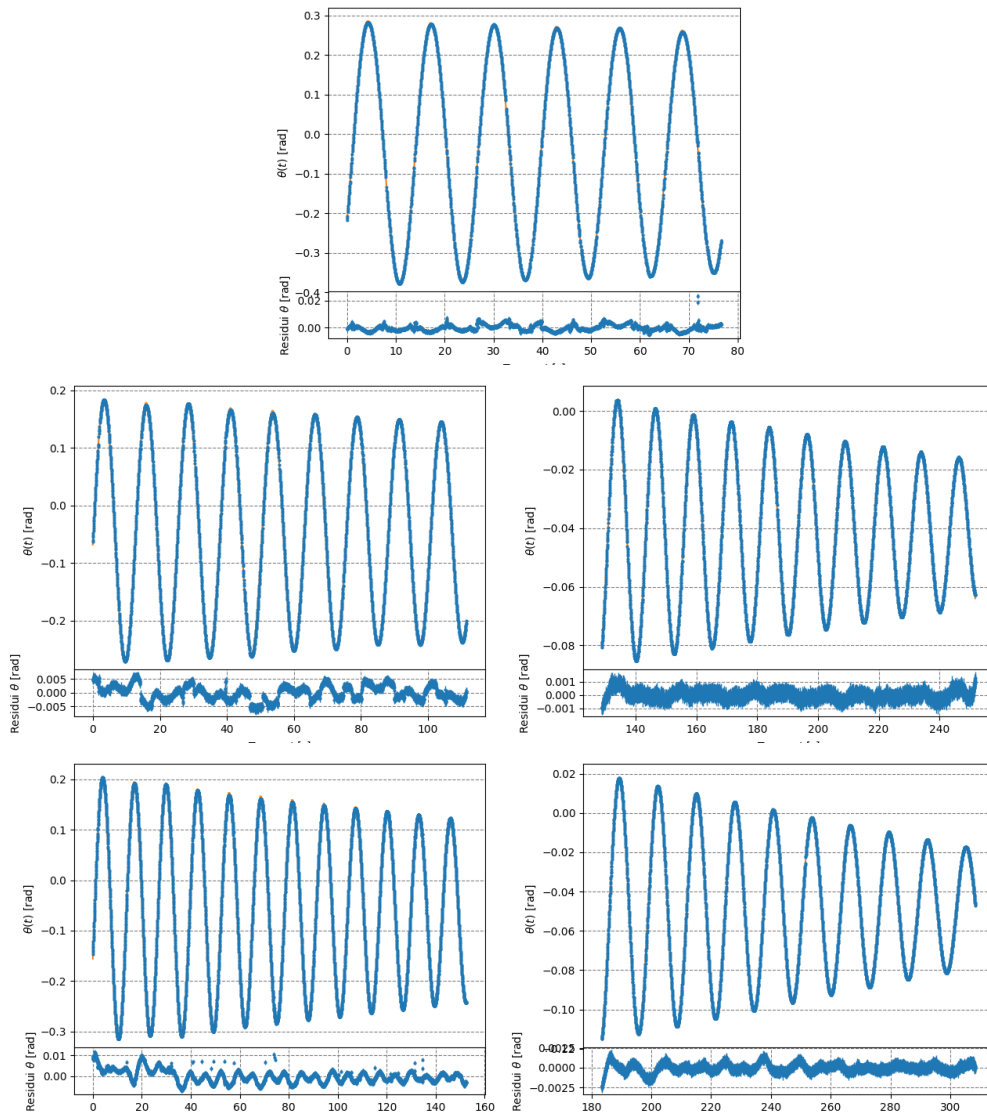


Figura 8: In ordine, un grafico dell'ottavo foro, due grafici del nono e due del decimo foro.

Effettuiamo ancora il fit con le pulsazioni appena calcolate. Lo script utilizzato è praticamente identico a quello utilizzato prima. Come incertezze utilizziamo quelle fornite da `curve_fit`.

3.1 Codice Python utilizzato

Illustriamo brevemente gli script Python utilizzati. Li rendiamo disponibili su GitLab. Per il fit, siccome le incertezze sulle ascisse sono trascurabili, utilizziamo `scipy.curve_fit`, che esegue una regressione con il metodo dei minimi quadrati ordinari. Con `matplotlib` disegniamo poi i grafici.

Per l'analisi dei dati estrapolati da Tracker abbiamo definito l'equazione differenziale la cui soluzione è il modello da usare nel fit, ricavata dalla Seconda Legge Cardinale includendo l'attrito dinamico di strisciamento sul supporto, supposto costante³, trascurando l'attrito viscoso dell'aria:

$$\ddot{\theta} = \gamma \sin \theta - \mu \operatorname{sgn} \dot{\theta}$$

```
# Equazione differenziale
def ode(th, om, gamma, mu):
    return -gamma*np.sin(th) - mu*np.sign(om)
```

Abbiamo poi scritto una funzione che risolve numericamente l'equazione differenziale.

```
# Risolvi l'equazione differenziale
def solveOde(
    t,
    # tempi a cui si vuole la soluzione
    th0,
    # angolo iniziale
    om0,
    # velocita' iniziale
    gamma,
    # fattore gravitazionale
    mu,
    # fattore dissipativo
    dt=None
    # intervallo di tempo
    # per integrazione numerica
):
    ...
```

Essa sceglie un intervallo di tempo abbastanza piccolo per effettuare l'integrazione.

```
...
# Parametri iniziali
if dt == None:
    dt = (t[-1]-t[0])/1. e4
if (t[1]-t[0])*0.11 < dt:
    dt = (t[1]-t[0])*0.11
...
```

Inizializza i parametri iniziali; utilizziamo le seguenti variabili:

- `tt` istante di tempo;
- `th` angolo istantaneo (in radianti);

³In realtà questo non è davvero realistico: la superficie di contatto e la pressione tra le pareti del pendolo e del sostegno cambiano durante le oscillazioni; tuttavia ci aspettiamo che queste variazioni siano piccole per piccoli angoli, quindi le trascuriamo.

- `om` velocità angolare istantanea (in radianti al secondo);
- `thR` un array Numpy dove vengono memorizzate le posizioni corrispondenti agli istanti di tempo contenuti nell'array `t[]`;
- `p` tiene conto della parità del passaggio di integrazione numerica;
- `i` indice dell'elemento da inserire in `thR[]`.

```

...
tt = t[0]
th = th0
om = om0
thR = np.zeros_like(t)
p = 0 # parita' del ciclo
i = 0
...

```

Finché l'equazione differenziale non è stata risolta per tutti gli istanti di tempo aspettati, continua a effettuare integrazione numerica. Si utilizza il metodo dell'Integratore Simpletico:

- se la parità del numero dello step durante l'integrazione numerica è pari si aggiorna prima la posizione angolare e poi la velocità angolare (proporzionale al momento coniugato della coordinata angolare);
- altrimenti, si aggiorna prima la velocità angolare e poi la velocità.

Effettuando l'integrazione in questo modo si dimostra che l'errore introdotto a ciascuno step è proporzionale al cubo dell'intervallo di tempo minimo `dt`, siccome la trasformazione introdotta è canonica a meno di un differenziale del tempo al terz'ordine. Prima di aggiornare la posizione angolare, salvo il suo valore nella variabile `pth`.

```

...
# Integrazione numerica
while i < len(t):
    tt += dt
    pth = th
    if p == 0:
        th += om * dt
        om += ode(th, om, gamma, mu) * dt
    else:
        om += ode(th, om, gamma, mu) * dt
        th += om * dt
    ...

```

Per slegare la precisione della soluzione dagli intervalli di tempo richiesti, sono stati slegati i valori `t[i+1]-t[i]` e `dt`. Quando l'equazione differenziale è stata risolta nell'intorno del punto desiderato, si trova il valore nel punto esatto tramite un'interpolazione lineare. Infine vengono restituiti i valori di θ agli intervalli di tempo desiderati.

```

...
if( tt > t[i] ):
    thR[i] = ( pth*(tt-t[i]) + th*(t[i]-tt+dt) )/dt
    i += 1
p = (p+1) % 2
return thR

```

Viene usata questa funzione come modello per `curve_fit()`.

4 Conclusioni

Notiamo che le lunghezze della sbarra che meglio approssimi l'andamento dei nostri dati sono (1.052 ± 0.009) m e (1.051 ± 0.001) m, dunque un risultato rassicurante considerato che la misura effettuata di tale lunghezza è di (1.049 ± 0.001) mm e quindi dentro uno-due sigma di incertezza. Tuttavia risulta essere piuttosto poco soddisfacente il fatto che gli scarti, calcolando i periodi dalle misurazioni effettuate con i cronometri, tra l'andamento misurato e quello di miglior approssimazione tra i periodi in funzione della distanza dal perno dal centro di massa siano sempre di un unico segno. Questo può essere causato dal fatto che il programma in Python atto a trovare i valori di miglior approssimazione è programmato in maniera tale da minimizzare i quadrati degli scarti. Però suggerisce che ci possa essere un effetto da noi trascurato legato ad attriti, al troncamento nell'approssimazione del seno o alla non omogeneità del corpo (approssimato ad una sbarra omogenea per il calcolo del momento di inerzia) che in tale discrepanza manifesta la sua presenza.